Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2024, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $\boldsymbol{\lambda}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\lambda - 1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{\lambda - 1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

se pide:

a) **Discutir el sistema en función de los valores de $\boldsymbol{\lambda}$.**
b) **Resolver el sistema en el caso $\boldsymbol{\lambda = 1}$ y encontrar, si es posible, una solución con $\boldsymbol{x = 5}$.**

Solución:

a) **Discutir el sistema en función de los valores de $\boldsymbol{\lambda}$.** Reescribimos el sistema en la forma $AX = K$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y + z = 0 \end{cases}$$

Discusión del sistema (Teorema de Rouché-Frobenius): La matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A*) son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de A:

$$\begin{aligned} |A| &= 0 - 1((\lambda - 1) - 1) + 1((\lambda - 1)^2 - 1) \\ &= -(\lambda - 2) + (\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1) \\ &= -\lambda + 2 + \lambda^2 - 2\lambda \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores críticos de λ:

$$|A| = 0 \implies \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Los valores críticos son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

Caso 1: Si $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$ y $\boldsymbol{\lambda \neq 2}$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. Como A^* es 3×4, $\text{Rg}(A^*) = 3$. Número de incógnitas $n = 3$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = n = 3 \implies$ Sistema Compatible Determinado (S.C.D.).

Caso 2: Si $\boldsymbol{\lambda = 1}$.

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$|A| = 0$. Fila 1 = Fila 2. Menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 2$. Como Fila 1 = Fila 2 en A^*, $\text{Rg}(A^*) = 2$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3 \implies$ Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.).

Caso 3: Si $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$|A| = 0$. Menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 2$. Consideramos el menor de A^* formado por C_1, C_2, C_4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1(0-2) + 1(1-1) = 2 \neq 0.$$

$\implies \text{Rg}(A^*) = 3$. $\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (S.I.).

$$\boxed{\textbf{Si } \boldsymbol{\lambda \neq 1, \lambda \neq 2 \implies S.C.D.} \quad \textbf{Si } \boldsymbol{\lambda = 1 \implies S.C.I.} \quad \textbf{Si } \boldsymbol{\lambda = 2 \implies S.I.}}$$

b) Resolver el sistema en el caso $\boldsymbol{\lambda = 1}$ y encontrar, si es posible, una solución con $\boldsymbol{x = 5}$.
Para $\lambda = 1$, el sistema es S.C.I. y equivalente a:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Sea $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces $y = 1 - t$ y $x = -z = -t$.
La solución general es $(x, y, z) = (-t, 1-t, t)$.
Buscamos la solución donde $x = 5$. $-t = 5 \implies t = -5$.
La solución particular es $x = 5$, $y = 1 - (-5) = 6$, $z = -5$.

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{\lambda = 1}\textbf{, la solución general es } \boldsymbol{(x,y,z) = (-t, 1-t, t), t \in \mathbb{R}}\textbf{. La solución con } \boldsymbol{x = 5} \textbf{ es } \boldsymbol{(5, 6, -5)}.}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto (0,0).
b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto (1,1).
c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en R.

Solución:

a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto (0,0).

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Condiciones: $f(0) = 0 \implies c = 0$. $f'(x) = 2ax + b$.
La pendiente de $y = x$ es 1. $f'(0) = 1 \implies b = 1$.
La función es $f(x) = ax^2 + x$. Cualquier $a \neq 0$ sirve. Ejemplo: $a = 1$.

$$\boxed{\textbf{Un ejemplo es } f(x) = x^2 + x.}$$

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto (1,1).

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Condiciones: $f(1) = 1 \implies a + b + c = 1$. $f'(1) = 0 \implies 2a + b = 0 \implies b = -2a$. $f''(1) < 0$ (para máximo). $f''(x) = 2a$, así que $2a < 0 \implies a < 0$.
Sustituyendo $b = -2a$ en la primera: $a - 2a + c = 1 \implies c = 1 + a$. $f(x) = ax^2 - 2ax + (1 + a)$.
Elegimos $a < 0$. Ejemplo: $a = -1$.
Entonces $b = -2(-1) = 2$ y $c = 1 + (-1) = 0$.

$$\boxed{\textbf{Un ejemplo es } f(x) = -x^2 + 2x.}$$

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en R.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Su derivada es $f'(x) = 2ax + b$.
Los extremos relativos ocurren donde $f'(x) = 0$. $2ax + b = 0 \implies x = -b/(2a)$.
Esta ecuación lineal tiene una única solución para x. Por lo tanto, solo puede haber un punto crítico y, como máximo, un extremo relativo.

$$\boxed{\textbf{No, porque su derivada } f'(x) = 2ax + b \textbf{ solo se anula en un punto (si } a \neq 0\textbf{).}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$;

a) **Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.**
b) **El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.**

Solución:

a) **Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.**

El plano buscado, π, es el plano mediador del segmento PQ.
Pasa por el punto medio $M=(\frac{1+2}{2},\frac{-1+1}{2},\frac{3-1}{2})=(3/2,0,1)$.
Es perpendicular al vector $\vec{PQ}=Q-P=(1,2,-4)$. Este es el vector normal $\vec{n}_\pi$.
Ecuación del plano: $1(x-3/2)+2(y-0)-4(z-1)=0$. $x-3/2+2y-4z+4=0$.
Multiplicando por 2: $2x-3+4y-8z+8=0 \implies 2x+4y-8z+5=0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x+4y-8z+5=0}}$$

b) **El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.**

Sea R el tercer vértice. $R \in r$.
La recta r en paramétricas es $x=2+\lambda, y=\lambda, z=\lambda$. $R(2+\lambda,\lambda,\lambda)$.
La condición es

$$|\vec{PQ}|^2+|\vec{PR}|^2+|\vec{QR}|^2=34$$

$$|\vec{PQ}|^2=1^2+2^2+(-4)^2=21$$

$$\vec{PR}=R-P=(1+\lambda,1+\lambda,\lambda-3)$$

$$|\vec{PR}|^2=(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(\lambda-3)^2=2(1+2\lambda+\lambda^2)+(\lambda^2-6\lambda+9)=3\lambda^2-2\lambda+11$$

$$\vec{QR}=R-Q=(\lambda,\lambda-1,\lambda+1)$$

$$|\vec{QR}|^2=\lambda^2+(\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2=\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1=3\lambda^2+2$$

Sustituyendo:

$$21+(3\lambda^2-2\lambda+11)+(3\lambda^2+2)=34$$

$$6\lambda^2-2\lambda+34=34$$

$$6\lambda^2-2\lambda=0 \implies 2\lambda(3\lambda-1)=0$$

Soluciones: $\lambda=0$ o $\lambda=1/3$.
Si $\lambda=0$, $R=(2,0,0)$. Tiene coordenadas nulas.
Si $\lambda=1/3$, $R=(2+1/3,1/3,1/3)=(7/3,1/3,1/3)$. No tiene coordenadas nulas.

$$\boxed{\textbf{El tercer vértice es } \boldsymbol{R\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}.}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0.3$ y $P(C|A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:

a) **Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.**
b) **Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.**

Datos: $P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.4, P(A_3) = 0.2$. A_1, A_2, A_3 forman una partición.
$P(B|A_1) = 0.25 \implies P(B|A_2) = 0.25$ y $P(B|A_3) = 2(0.25) = 0.5$.
Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

$$P(B) = (0.25)(0.4) + (0.25)(0.4) + (0.5)(0.2) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(B) = 0.3}}$$

b) **Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.**

Datos: C independiente de $A_1 \implies P(C \cap A_1) = P(C)P(A_1) = 0.4P(C)$.

$$P(C|A_2) = 0.3 \implies P(C \cap A_2) = P(C|A_2)P(A_2) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$P(C|A_3) = 0.6 \implies P(C \cap A_3) = P(C|A_3)P(A_3) = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3)$$

$$P(C) = 0.4P(C) + 0.12 + 0.12$$

$$P(C) - 0.4P(C) = 0.24 \implies 0.6P(C) = 0.24 \implies P(C) = 0.24/0.6 = 0.4$$

Independencia de C y A_2: ¿Es $P(C \cap A_2) = P(C)P(A_2)$?

$$P(C \cap A_2) = 0.12$$

$$P(C)P(A_2) = (0.4)(0.4) = 0.16$$

Como $0.12 \neq 0.16$, los sucesos C y A_2 no son independientes.

$$\boxed{\boldsymbol{P(C) = 0.4}\textbf{. C y } \boldsymbol{A_2} \textbf{ NO son independientes.}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes $\det(A+B) = \det A + \det B$ no es cierta en general.

a) **Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces $\det((A+B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB)$.**

b) **Dadas las matrices**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C+D) = \det C + \det D$.

c) **Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.**

Solución:

a) **Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces $\det((A+B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB)$.**

Usamos propiedades de determinantes:

$$\det(XY) = \det X \det Y$$

y

$$\det(X^2) = (\det X)^2$$

$$\text{LHS} = \det((A+B)^2) = (\det(A+B))^2$$

Por hipótesis,

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

$$\text{LHS} = (\det A + \det B)^2 = (\det A)^2 + (\det B)^2 + 2(\det A)(\det B)$$

$$\text{RHS} = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB) = (\det A)^2 + (\det B)^2 + 2(\det A)(\det B)$$

Como LHS = RHS, queda probado.

$$\boxed{\textbf{Queda probado.}}$$

b) **Determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C+D) = \det C + \det D$.**

$$C + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C+D) = 2(2(\alpha+1) - 2) = 2(2\alpha) = 4\alpha$$

$$\det C = 1(\alpha - 0) - 0 + (-1)(-\alpha - 2) = \alpha + \alpha + 2 = 2\alpha + 2$$

$$\det D = 1(1-4) - 0 + 1(4 - (-1)) = -3 + 5 = 2$$

Igualdad:

$$\det(C+D) = \det C + \det D$$

$$4\alpha = (2\alpha + 2) + 2$$

$$4\alpha = 2\alpha + 4 \implies 2\alpha = 4 \implies \alpha = 2$$

$$\boxed{\textbf{El único valor es } \boldsymbol{\alpha = 2}.}$$

c) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes. Para $\alpha = -1$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Sistema $C\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$|C| = 2\alpha + 2 = 2(-1) + 2 = 0$$

El sistema es S.C.I. (al ser homogéneo siempre es compatible). De (1): $x = z$. De (2): $y = x$. Entonces $x = y = z$. La tercera ecuación $2x - x - x = 0$ se cumple. La solución depende de un parámetro. Sea $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{(x, y, z) = (t, t, t)} \textbf{ con } \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}.}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.

Solución:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Paridad: $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$
La función es impar.

Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.
Puntos críticos: $f'(x) = 0 \implies x = 1, x = -1$.
Estudiamos el signo de $f'(x)$:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento $f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento: $(-1, 1)$.

$$\boxed{\textbf{f es impar. Creciente en } (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\textbf{. Decreciente en } (-1,1).}$$

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.
$fx) = x^3 - 3x$. $g(x) = x^2 - 3x$

Intersecciones entre las funciones:

$$x^3 - 3x = x^2 - 3x \implies x^3 - x^2 = 0 \implies x^2(x-1) = 0$$

Los puntos de corte son $x = 0$ y $x = 1$.
El área es

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |x^3 - x^2| dx$$

En $(0,1)$, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) < 0$. Por lo tanto, $|x^3 - x^2| = -(x^3 - x^2) = x^2 - x^3$.

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{12}.$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\ \mathrm{u}^2}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1} \quad s \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) **Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.**
b) **Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.**

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.**

Recta r: Punto $P_r(2,-1,0)$, vector $\vec{v}_r = (3,-1,1)$.
Recta s: Vector $\vec{v}_s = (1,-1,0) \times (1,0,1) = (-1,-1,1)$. Punto P_s: si $x = 0$, $y = -5$, $z = 3$. $P_s(0,-5,3)$.
$\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales. Se cortan o se cruzan.
Vector $\vec{P_rP_s} = P_s - P_r = (-2,-4,3)$.
Producto mixto $[\vec{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$:

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(0) + 4(4) + 3(-4) = 16 - 12 = 4.$$

Como es $\neq 0$, las rectas se cruzan.
Distancia:

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-4,-4)$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$d(r,s) = \frac{|4|}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cruzan.} \quad d(r,s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \textbf{ u.}}$$

b) **Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.**

Sea t la recta buscada. Pasa por $P(5,-1,2)$. Corta a r perpendicularmente en un punto M.
M es un punto genérico de r: $M(2+3\lambda, -1-\lambda, \lambda)$.
El vector $\vec{PM}$ es director de t y debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$.
$\vec{PM} = M - P = (2+3\lambda-5, -1-\lambda-(-1), \lambda-2) = (3\lambda-3, -\lambda, \lambda-2)$.

$$\vec{PM} \cdot \vec{v}_r = 0$$

$$(3\lambda-3, -\lambda, \lambda-2) \cdot (3,-1,1) = 0$$

$$3(3\lambda - 3) - 1(-\lambda) + 1(\lambda - 2) = 0$$

$$9\lambda - 9 + \lambda + \lambda - 2 = 0 \implies 11\lambda - 11 = 0 \implies \lambda = 1$$

El punto de intersección es $M(2 + 3(1), -1 - 1, 1) = (5, -2, 1)$.
La recta t pasa por $P(5, -1, 2)$ y $M(5, -2, 1)$.
Vector director $\vec{d_t} = P\vec{M} = (0, -1, -1)$.
Ecuación paramétrica de t:

$$t \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} \quad , \mu} \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quien friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.**
b) **Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.**

$p_A = 0.25$ (Acierto A), $q_A = 0.75$ (Fallo A).
$p_B = 0.30$ (Acierto B), $q_B = 0.70$ (Fallo B).
El juego se decide tras 3 lanzamientos si uno tiene 3 aciertos y el otro 0.
Sea $X_A(n)$ aciertos de A en n lanzamientos, $X_B(n)$ aciertos de B en n lanzamientos.
Caso 1: A gana en 3 lanzamientos ($X_A(3) = 3$ y $X_B(3) = 0$).
$P(X_A(3) = 3) = \binom{3}{3} p_A^3 q_A^0 = (0.25)^3$.
$P(X_A(3) = 3) = \binom{3}{3} p_A^3 q_A^0 = (0.25)^3$.
$P(X_B(3) = 0) = \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 = (0.70)^3$.

$$P(\text{Caso 1}) = (0.25)^3(0.70)^3$$

Caso 2: B gana en 3 lanzamientos ($X_A(3) = 0$ y $X_B(3) = 3$).
$P(X_A(3) = 0) = \binom{3}{0} p_A^0 q_A^3 = (0.75)^3$
$P(X_B(3) = 3) = \binom{3}{3} p_B^3 q_B^0 = (0.30)^3$.
$P(X_B(3) = 0) = \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 = (0.70)^3$.

$$P(\text{Caso 2}) = (0.75)^3(0.30)^3$$

Probabilidad total:

$$P = (0.25)^3(0.70)^3 + (0.75)^3(0.30)^3$$

$$P = (0.015625)(0.343) + (0.421875)(0.027) \approx 0.005359 + 0.011391 \approx 0.01675$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{Decidido antes del } 4^{\text{o}} \text{ lanz.}\boldsymbol{)} \approx \mathbf{0.01675}}$$

b) **Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.**

Sea Y_A el número de fallos de Antonio en $n = 60$ lanzamientos.
Probabilidad de fallo $q_A = 0.75$. $Y_A \sim B(n = 60, p = 0.75)$.
Se pide $P(Y_A \geq \frac{2}{3} \times 60) = P(Y_A \geq 40)$.
Aproximamos por Normal $Y'_A \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = np = 60 \times 0.75 = 45$.
$\sigma^2 = np(1-p) = 60 \times 0.75 \times 0.25 = 11.25$.
$\sigma = \sqrt{11.25} \approx 3.354$.
$Y'_A \sim N(45, 11.25)$.
Aplicamos corrección por continuidad: $P(Y_A \geq 40) \approx P(Y'_A \geq 39.5)$.

Estandarizamos: $Z = \frac{Y'_A - \mu}{\sigma}$. $P(Y'_A \geq 39.5) = P\left(Z \geq \frac{39.5-45}{3.354}\right) \approx P(Z \geq -1.64)$. $P(Z \geq -1.64) = P(Z \leq 1.64)$.
Usando la tabla N(0,1): $P(Z \leq 1.64) \approx 0.9495$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(Y_A \geq 40) \approx 0.9495}}$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665